L'équilibre concurrentiel
Le modèle d'Arrow-Debreu

Yves Balasko

27 février 2003

1. Introduction

Les économistes considèrent qu'une caractéristique essentielle des marchés concurrentiels est qu'aucun agent économique n'est en position de modifier les prix du marché. Cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas de monopoles, ou encore d'oligopoles controlant une part suffisante du marché pour que de telles manipulations soient possibles.

Dans un marché concurrentiel, les prix du marché s'imposent comme des données exogènes aux différents agents économiques. Ces prix égalisent par hypothèse l'offre et la demande des différents biens.

Le modèle d'Arrow-Debreu est la représentation mathématique du marché concurrentiel.

2. Le marché: biens et prix

2.1. Biens

Chaque bien (sur un marché) correspond à une grandeur mesurable (définition de l'égalité et de la somme de deux quantités de cette grandeur).
Choix d'une unité de mesure arbitraire.
Chaque bien est divisible.
Nombre fini de biens ℓ
Espace des biens: $\mathbb{R}^\ell$

Le vecteur $x = (x^1, x^2, \ldots, x^\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ s'appelle souvent un **complexe** ou un **panier de biens**.

Noter que les coordonnées du vecteur x ne sont pas nécessairement positives. *Interprétation économique?*

2.2. Prix

Une fois que le choix d'une **unité** est fait pour chaque bien, on considère le prix p_j de l'unité du bien j. C'est un nombre > 0.

Le vecteur $p = (p_1, p_2, \ldots, p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_{++}$ est appelé le **vecteur prix.**

Le **numéraire** est un bien qui est choisi comme bien de référence à l'aide duquel on exprime les prix des autres biens. *Le numéraire est-il la même chose que la monnaie?*

On choisit le ℓ-ième bien comme numéraire. C'est la même chose que poser $p_\ell = 1$.

On note $S = \mathbb{R}^{\ell-1}_{++} \times \{1\}$ l'ensemble des prix **normalisés** par la convention de numéraire.

2.3. Valeur d'un complexe de biens

Soit $x = (x^1, x^2, \ldots, x^\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ un complexe de biens. Soit $p \in S$ un vecteur prix.

La **valeur du complexe de biens** $x \in \mathbb{R}^\ell$ pour le vecteur prix $p \in S$ est le produit scalaire

$$p \cdot x = p_1 x^1 + p_2 x^2 + \cdots + p_\ell x^\ell.$$

3. Un premier agent économique: le consommateur

3.1. La fonction de demande individuelle

La **fontion de demande** du consommateur i est une application

$$f_i : S \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell.$$

Le vecteur $f_i(p, w_i)$ représente le panier de biens demandé par le consommateur i pour un vecteur de prix affichés $p \in S$ and une richesse $w_i \in \mathbb{R}$.

Interprétation économique de $f_i(p, w_i)$*?*

Une propriété économique de la fonction de demande : La loi de Walras

$$p \cdot f_i(p, w_i) = w_i.$$

Interprétation économique de la loi de Walras?

3.2. Comprendre la fonction de demande

La notion d'ensemble de consommations

On note X_i le sous-ensemble de l'espace des biens $\mathbb{R}^\ell$ qui représente l'ensemble des consommations possibles pour le consommateur i. On dit que X_i est l'**ensemble de consommation** du consommateur i.

Plus haut, on avait implicitement $X_i = \mathbb{R}^\ell$. Très souvent, on fait l'hypothèse $X_i = \mathbb{R}^\ell_+$ ou $\mathbb{R}^\ell_{++}$. *Interprétation économique?*

La notion d'utilité

La **fonction d'utilité** du consommateur i est une application

$$u_i : X_i \to \mathbb{R}.$$

On dit que le complexe de biens y_i est préféré au sens large au complexe de biens x_i si l'on a $u_i(x_i) \leq u_i(y_i)$:

$$x_i \preceq_i y_i \Longleftrightarrow u_i(x_i) \leq u_i(y_i).$$

La relation binaire $\preceq_i$ est une relation de préordre sur X_i. *Quelles sont les propriétés caractéristiques d'une relation de préordre?* On dit que $\preceq_i$ représente le **préordre de préférence** du consommateur i.

Un consommateur peut-il avoir plusieurs fonctions d'utilité différentes représentant le même préordre de préférence? Interprétation économique?

3.3. Hypothèses sur les préférences des consommateurs

Les préordres de préférences des différents consommateurs d'une économie satisfont un certain nombre de propriétés. Les plus fréquemment utilisées sont les suivantes:

1) Les fonctions d'utilité u_i sont définies sur $X_i = \mathbb{R}^\ell_{++}$ et C^∞;

2) $Du_i(x_i) > 0$ (monotonicité);

3) Le système

$$X_i^T D^2 u_i(x_i) X_i \geq 0 \quad \text{et} \quad Du_i(x_i)^T X_i = 0$$

avec $X_i \in \mathbb{R}^\ell$ ne possède que la solution $X_i = 0$ (stricte quasi-concavité);

4) L'ensemble d'indifférence $\{y_i \in X_i \mid u_i(y_i) = u_i(x_i)\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^\ell$ pour tout $x_i \in X_i$.

Interprétations économiques des quatre conditions précédentes?

Exercice: Déduire de la Propriété (3) la propriété suivante de la matrice dite hessienne bordée de la fonction d'utilité:

Proposition 1. *La matrice hessienne bordée*

$$\begin{bmatrix} D^2u_i(x_i) & Du_i(x_i) \\ Du_i(x_i)^T & 0 \end{bmatrix}$$

est inversible.

Illustration graphique dans le cas $\ell = 2$.

3.4. Maximisation des préférences sous contrainte budgétaire et fonctions de demande

Soit $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité représentant le préordre de préférences du consommateur i. Soit $p \in S$ un vecteur prix donné. On admet que si le consommateur i dispose de la richesse $w_i > 0$ (donnée arbitrairement), ce consommateur cherche à maximiser l'utilité $u_i(x_i)$ de la consommation $x_i \in X_i$ sous la contrainte de budget $p \cdot x_i \leq w_i$.

Montrer que le problème

$$\textit{Maximiser} \quad u_i(x_i)$$

sous la contrainte de budget

$$p \cdot x_i \leq w_i$$

et $x_i \in X_i$ *admet une solution unique. On note cette solution* $f_i(p, w_i)$.

Montrer que la contrainte de budget est saturée, c'est à dire que l'on a $p \cdot x_i = w_i$ *pour* x_i *solution du problème.*

Montrer que la fonction de demande f_i *déduite de la maximisation d'un préordre de préférence satisfaisant les propriétés indiquées plus haut vérifie la relation de Walras. Quelle est la propriété essentielle pour la validité de la relation de Walras?*

Conditions du premier ordre

Les conditions nécessaires du premier ordre de ce problème de maximisation sous contrainte s'obtiennent à partir du Lagrangien de ce problème. Ce Lagrangien s'écrit

$$u_i(x_i) - \lambda_i(p \cdot x_i - w_i).$$

Les conditions du premier ordre s'obtiennent en écrivant que les dérivées partielles du premier ordre du Lagrangien sont égales à 0. Ces conditions sont donc

$$Du_i(x_i) = \lambda_i p \quad \text{et} \quad p \cdot x_i - w_i = 0.$$

Comme $x_i = f_i(p, w_i)$, la première égalité s'écrit aussi sous la forme

$$Du_i(f_i(p, w_i)) = \lambda_i p,$$

avec $\lambda_i > 0$.

Proposition 2. *Les conditions du premier ordre sont aussi suffisantes.*

3.5. Différentiabilité de la fonction de demande individuelle

Proposition 3. *La fonction de demande $f_i : S \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^{\ell}_{++}$ obtenue par maximisation d'un préordre de préférence vérifiant les hypothèses (1) à (4) sous contrainte budgétaire est de classe C^{∞}.*

Démonstration. On applique le théorème des fonctions implicites aux conditions du premier ordre. On a $x_i = f_i(p, w_i)$ si x_i est la solution du problème

$$\text{Maximiser} \quad u_i(x_i)$$

sous la contrainte

$$p \cdot x_i = w_i.$$

Ceci est équivalent à l'existence d'un $\lambda_i > 0$ tel que le couple (x_i, λ_i) est solution du système d'équation défini par les conditions du premier ordre, à savoir

$$Du_i(x_i) - \lambda_i p = 0 \quad , \quad p \cdot x_i - w_i = 0$$

Notons $F(x_i, \lambda_i, p, w_i) = 0$ ce système d'équation où les inconnues sont le couple (x_i, λ_i) tandis que (p, w_i) sont de simples paramètres. (On note que la fonction F est évidemment C^∞.) Le théorème des fonctions implicites dit qu'une condition suffisante pour que la solution (x_i, λ_i) soit une fonction C^∞ des paramètres (p, w_i) est que la matrice jacobienne

$$\frac{DF}{D(x_i, \lambda_i)}$$

soit inversible.

Calculons donc cette matrice jacobienne:

On trouve

$$J = \begin{bmatrix} D^2 u_i(x_i) & p \\ p^T & 0 \end{bmatrix}$$

On sait que l'on a $Du_i(x_i) = \lambda_i p$. Par conséquent, en multipliant la dernière ligne et colonne de la matrice jacobienne par $\lambda_i \neq 0$ (*Pourquoi sait-on que* λ_i *est* $\neq 0$*?*) on obtient la matrice hessienne bordée de l'utilité

$$\begin{bmatrix} D^2 u_i(x_i) & Du_i(x_i) \\ Du_i(x_i)^T & 0 \end{bmatrix}$$

matrice que l'on sait inversible. Il en résulte que $(f_i(p, w_i), \lambda_i)$ est fonction C^∞ de (p, w_i). Ceci implique que $f_i(p, w_i)$ est aussi fonction C^∞. (*Pourquoi?*)

4. Le modèle de l’économie d’échange

Une économie d’échange consiste en la donnée d’un certain nombre de biens ℓ, d’un certain nombre de consommateurs m, le consommateur i (avec i variant de 1 à m) étant caractérisé par sa fonction de demande $f_i : S \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^{\ell}_{++}$ et par un vecteur de ressources individuelles $\omega_i \in X_i = \mathbb{R}^{\ell}_{++}$. On admet que les fonctions de demande f_i sont obtenues par maximization de fonctions d’utitité u_i (vérifiant les propriétés (1) à (4) vues plus haut) sous contrainte budgétaire.

4.1. Définition de l’équilibre concurrentiel

Soit $p \in S$ un vecteur prix arbitrairement choisi, la demande du consommateur i est égale à $f_i(p, p \cdot \omega_i)$. La demande totale (la somme des demandes individuelles) est égale à

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p, p \cdot \omega_i).$$

L’offre totale est la somme des offres individuelles, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i.$$

Definition 4. *Le vecteur prix* $p \in S$ *est un vecteur prix d'équilibre de l'économie* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ *s'il y égalité entre offre et demande totale:*

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p, p \cdot \omega_i) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i.$$

Exercice: Montrer que les inégalités

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p, p \cdot \omega_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \omega_i$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p, p \cdot \omega_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \omega_i$$

sont nécessairement des égalités.

Interprétation économique?

5. La notion d'optimum de Pareto

On dit que l'allocation $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est un optimum de Pareto s'il n'existe pas d'allocation $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

$$u_i(y_i) \geq u_i(x_i) \quad \text{pour tout } i\text{, une inégalité au moins étant stricte}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Montrer que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est un optimum de Pareto, alors x est la solution du problème de maximization sous contraintes suivant:

$$\text{Maximiser} \quad u_1(z_1)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} u_2(z_2) &\geq u_2(x_2) \\ \ldots &\geq \ldots \\ u_m(z_m) &\geq u_m(x_m) \\ \sum_{i=1}^{m} z_i^1 &= \sum_{i=1}^{m} x_i^1 \\ \ldots &= \ldots \\ \sum_{i=1}^{m} z_i^\ell &= \sum_{i=1}^{m} x_i^\ell \end{aligned}$$

Réciproque?

Peut-on remplacer les inégalités dans les contraintes par des égalités? Expliquer.

5.1. Optimums de Pareto et prix supports

On dit que le vecteur prix $p \in S$ supporte le panier de bien $x_i \in X_i$ si l'égalité suivante est vérifiée:

$$f_i(p, p \cdot x_i) = x_i.$$

Interprétation économique?

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ une allocation de biens entre les m agents de l'économie. On dit que le vecteur prix $p \in S$ supporte l'allocation x si le vecteur prix p supporte chaque composante x_i de l'allocation x.

Proposition 5. *Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un optimum de Pareto. Alors il existe un vecteur prix $p \in S$ qui supporte l'allocation $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.*

Démonstration.

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est un optimum de Pareto, alors x est solution du problème de maximisation

$$\text{Maximiser} \quad u_1(z_1)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} u_2(z_2) &= u_2(x_2) \\ \ldots &= \ldots \\ u_m(z_m) &= u_m(x_m) \\ \sum_{i=1}^m z_i &= \sum_{i=1}^m x_i \end{aligned}$$

Expliquer pourquoi?

Les conditions nécessaires du premier ordre de maximisation de ce problème d'optimisation sous contraintes prennent alors la forme où on a le Lagrangien

$$u_1(z_1) + \lambda_1(u_2(z_2) - u_2(x_2)) + \cdots + \lambda_m(u_m(z_m) - u_m(x_m)) +$$
$$\mu_1(\sum_{i=1}^m z_i^1 - \sum_{i=1}^m x_i^1) + \cdots + \mu_\ell(\sum_{i=1}^m z_i^\ell - \sum_{i=1}^m x_i^\ell)$$

Il suffit alors d'écrire que les dérivées partielles d'ordre un par rapport aux inconnues du problème sans contraintes (i.e., les $z_1, \ldots, z_m, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_\ell$).

Cela donne en particulier à l'optimum x les égalités suivantes:

$$Du_1(x_1) = \lambda_2 Du_2(x_2) = \cdots = \lambda_m Du_m(x_m) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell)^T.$$

Les vecteurs $Du_i(x_i)$ sont tous colinéaires. Soit $p \in S$ l'unique vecteur prix (normalisé par la convention de numéraire) qui est colinéaire avec ces vecteurs gradients. La condition $Du_i(x_i)$ colinéaire avec $p \in S$ devient équivalente à l'égalité

$$x_i = f_i(p, p \cdot x_i).$$

Pourquoi?

Ceci démontre que le vecteur prix $p \in S$ supporte l'optimum de Pareto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

6. Les deux grandes propriétés classiques de l'équilibre concurrentiel

6.1. Existence d'un vecteur prix d'équilibre pour toute économie d'échange

Pour tout $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) \in \Omega$, il existe au moins un vecteur prix d'équilibre $p \in S$.

6.2. Efficacité de l'allocation d'équilibre concurrentiel: Les deux théorèmes de l'économie du bien-être

Proposition 6 (Premier théorème de l'économie du bien-être). *Toute allocation d'équilibre concurrentiel* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *est un optimum de Pareto.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ n'est pas un optimum de Pareto.

Il existe donc $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ tel que

$$u_i(y_i) \geq u_i(x_i) \qquad \text{pour tout } i\text{, stricte pour au moins un } i\text{,}$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

L'inégalité

$$u_i(y_i) \geq u_i(x_i)$$

implique l'inégalité

$$p \cdot y_i \geq p \cdot x_i.$$

Pourquoi?

De même, l'inégalité stricte

$$u_i(y_i) > u_i(x_i)$$

implique l'inégalité stricte

$$p \cdot y_i > p \cdot x_i.$$

Encore une fois, pourquoi?

On en déduit la série d'inégalités (dont une au moins une est stricte)

$$p \cdot y_i \geq p \cdot x_i \quad \text{pour tout } i$$

Additionnons membre à membre toutes ces inégalités; ça donne l'inégalité stricte (*pourquoi?*)

$$p \cdot (\sum_{i=1}^{m} y_i) > p \cdot (\sum_{i=1}^{m} x_i).$$

D'où une contradiction avec la condition

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Proposition 7 (Deuxième théorème de l'économie du bien-être). *Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un optimum de Pareto. Il existe alors un $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) \in \Omega$ tel que x soit une allocation d'équilibre possible pour l'économie ω.*

Démonstration.

Puisque $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est un optimum de Pareto, il existe un vecteur prix $p \in S$ qui supporte l'allocation x, i.e.,

$$x_i = f_i(p, p \cdot x_i)$$

pour $i = 1, 2, \ldots, m$.

Il en résulte que le vecteur prix $p \in S$ (qui supporte l'optimum de Pareto x) est aussi un vecteur prix d'équilibre pour l'économie $\omega = x$. *Pourquoi?*.

On a donc trouvé un exemple d'économie ω pour lequel l'optimum de Pareto x est une allocation d'équilibre concurrentiel.

Existe-t-il d'autres économies $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ *pour lesquelles* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *est aussi une allocation d'équilibre concurrentiel? Décrire avec précision l'ensemble de ces économies.*

Une observation concernant les optimums de Pareto

Proposition 8. *Soit* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *un optimum de Pareto (pour les* m *consommateurs définis par les fonctions d'utilité* u_1*,* u_2*, …,* u_m *et les ressources totales* $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$*. Alors* $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ *est un optimum de Pareto pour les consommateurs définis par les fonctions d'utilité* u_{i_1}*,* u_{i_2}*, …,* u_{i_k} *et les ressources totales* $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k}$*.*

Démonstration.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ n'est pas un optimum de Pareto. Il existe donc une allocation $(x'_{i_1}, x'_{i_2}, \ldots, x'_{i_k})$ qui est Pareto supérieure à $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ et telle que $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k} = x'_{i_1} + x'_{i_2} + \cdots + x'_{i_k}$. On complete cette allocation en une allocation des m consommateurs en posant $x'_j = x_j$ pour $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$. Ceci définit une allocation $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ qui est Pareto supérieure à l'allocation $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, d'où une contradiction.

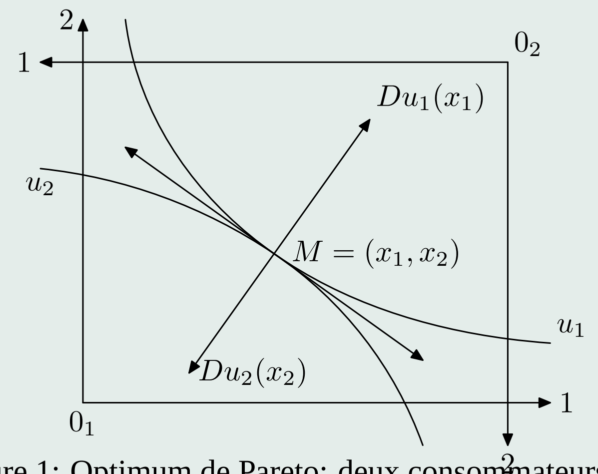


Figure 1: Optimum de Pareto: deux consommateurs

Illustration géométrique: le cas de deux consommateurs et la boite d'Edgeworth.

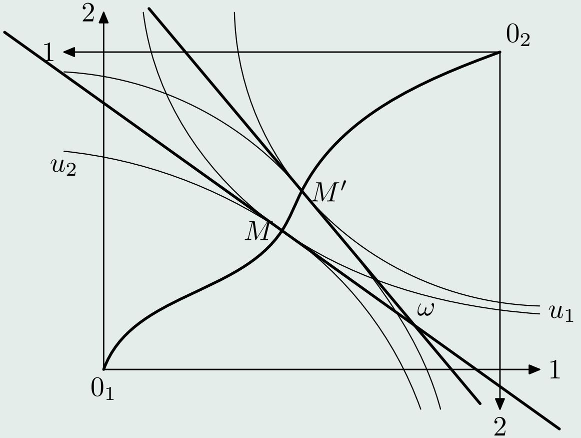


Figure 2: Equilibre général et optimums de Pareto

7. Un second agent économique: le producteur

7.1. Ensembles de production

Une firme j transforme certains biens en d'autres biens. Ceci se représente très facilement à l'aide du concept du vecteur d'activité de la firme. Plus précisément, le vecteur $y = (y^1, y^2, \ldots, y^\ell)$ a pour coordonnées les quantités des différents biens produits ou transformés par la firme. On note positivement les quantités effectivement produite, négativement les quantités de biens servant à la productions d'autres biens.

On note Y_j l'ensemble de toutes les activités possibles de la firme j. Cet ensemble est l'ensemble de production de la firme j.

Soit y_j un vecteur d'activité de la firme j. Pour le vecteur prix $p \in S$, la valeur $p \cdot y_j$ de l'activité y_j s'appelle le profit de la firme j pour l'activité y_j et le vecteur prix $p \in S$.

On admet que, étant donné le vecteur prix $p \in S$, la firme j maximise le profit $p \cdot y_j$ sujet à la contrainte de production $y_j \in Y_j$.

7.2. La fonction d'activité du producteur

On admet que l'activité de la firme est une fonction $g_j(p)$ qui dépend du vecteur prix $p \in S$.

La **fonction d'activité** $g_j : S \to Y_j$ de la firme j représente l'activité de la firme j pour le vecteur prix p. Le profit de la firme est alors égal à $p \cdot g_j(p)$.

On admet que la firme j détermine l'activité $g_j(p)$ qui maximise son profit. Une partie de la théorie de la firme consiste à étudier dans quelles mesures des hypothèses économiquement raisonnables sur l'ensemble de production Y_j permettent de définir une fonction d'activité $g_j(p)$.

Hypothèses classiques concernant les ensembles de production

Les hypothèses les plus traditionnelles concernant les ensembles de production sont les suivantes:

L'ensemble de production Y_j est fermé dans $\mathbb{R}^\ell$.

$$0 \in Y_j$$

(l'inactivité est toujours possible.)
Si $y_j \in Y_j$, alors $y_j - \mathbb{R}^\ell_{++} \subset Y_j$ (hypothèse de libre disposition).

Si l'ensemble de production Y_j est un cône, on dit que la production a lieu à rendements constants.

Interprétations économiques?

On dit que la production y_j est efficace si on a

$$(y_j + \mathbb{R}^{\ell}_{++}) \cap Y_j = \{y_j\}.$$

Interprétation économique?

On appelle **frontière efficace** $\partial Y_{j,\text{eff}}$ de l'ensemble de production Y_j l'ensemble des productions efficaces de la firme j. La frontière efficace est évidemment la partie la plus intéressante de l'ensemble de production. Souvent, on se contente de décrire la frontière efficace par un système d'équation souvent qualifié de «fonctions de production». On revient sur ce sujet un peu plus loin.

Hypothèse de rendements décroissants

On dit que la production a lieu avec des rendements décroissants si l'ensemble de production Y_j est convexe.

On dit que la production a lieu avec des rendements strictement décroissants si l'ensemble des productions efficaces est la frontière d'un ensemble strictement convexe. Pratiquement, cela signifie que si y et y' sont deux productions efficaces, alors $y + y'/2$ est une production possible, mais n'est pas efficace. Elle est dominée par une production efficace.

Le profit associé à un vecteur d'activité

Comme pour le consommateur, la fonction d'activité $g_j : S \to \mathbb{R}^\ell$ de la firme j peut être définie à partir de l'ensemble de production Y_j et de l'hypothèse de maximisation du profit si l'ensemble de production vérifie un certain nombre de propriétés.

En particulier, on a

Proposition 9. *Supposons que l'ensemble de consommation Y_j soit borné supérieurement, et que la frontière efficace $\partial Y_{j,\text{eff}}$ soit strictement convexe, alors la fonction d'activité g_j est définie pour tout vecteur prix $p \in S$.*

Démonstration?

La fonction d'activité ainsi obtenue est-elle continue?

Montrer que le profit est toujours ≥ 0.

Le cas d'un seul produit

Dans un certain nombre de questions, la notion d'ensemble de production est trop générale. C'est en particulier le cas pour une firme qui ne produit qu'un seul bien. Supposons que ce soit le bien 1, les autres étant des facteurs de productions. Soit $h(y^2, y^3, \dots, y^\ell)$ la quantité maximale du bien 1 qui peut être produite avec les inputs $(y^2, y^3, \dots, y^\ell)$ des différents facteurs de productions (comptés négativement).

L'ensemble de production devient

$$Y_j\{y \in \mathbb{R}^\ell \mid y^1 \leq h(y^2, y^3, \dots, y^\ell)\}$$

L'équation de la frontière efficace est

$$y^1 = h(y^2, y^3, \dots, y^\ell).$$

On dit aussi dans ce cas que la fonction h est une fonction de production. (Attention: la fonction h n'est pas, au sens strict, l'équation de la frontière efficace!)

On fait maintenant l'hypothèse que la fonction h est strictement concave et différentiable. On a alors:

Proposition 10. *Pour $y = g_j(p)$, il vient*

$$\frac{\partial h}{\partial y^k} = -\frac{p_k}{p_1}.$$

Démonstration. Par hypothèse, $y = g_j(p)$ maximise le profit $p{\cdot}y$ sous la contrainte $y^1 - h(y^2, \ldots, y^\ell) = 0$.

Ce profit s'écrit sous la forme

$$p_1 h(y^2, \ldots, y^\ell) + p_2 y^2 + \cdots + p_\ell y^\ell.$$

Les dérivées du premier ordre sont nécessairement égales à zéro, ce qui donne

$$p_1 \frac{\partial h}{\partial y^k} + p_k = 0.$$

Expliquer pourquoi ces dérivées partielles sont négatives.

Pourquoi la propriété de stricte concavité de la fonction h suffit pour entrainer que la solution qui maximise le profit soit unique?

Proposition 11. *Soit $y = g_j(p)$. Le vecteur prix $p \in S$ est alors normal en y à l'hypersurface $\partial Y_{j,\mathit{eff}}$ définissant la frontière efficace.*

Démonstration. En effet, l'hypersurface d'équation $y^1 - h(^2, \ldots, y^\ell)$ a pour normale le vecteur défini par les dérivées partielles (d'ordre un) de l'équation de l'hypersurface, c'est à dire le vecteur

$$(1, -\frac{\partial h}{\partial y^2}, \ldots, -\frac{\partial h}{\partial y^\ell})$$

vecteur colinéaire au vecteur prix $p \in S$.

Coût marginal

Soit y^1 une quantité du bien 1 que la firme j veut produire. Pour cela, il faut qu'elle trouve des inputs $y^2, \ldots, y^\ell$ de façon à ce que l'on ait

$$y^1 = h(y^2, \ldots, y^\ell).$$

Le coût de ces inputs est égal à $-(p_2 y^2 + \cdots + p_\ell y^\ell)$. On définit la fonction coût $c(y^1)$ pour produire la quantité y^1 (compte tenu du vecteur prix $p \in S$) comme le minimum du coût de ces inputs. C'est une fonction différentiable de y^1. Le profit de l'entreprise j est alors égal à $p_1 y^1 - c(y^1)$.

Proposition 12. *Pour $y = g_j(p)$, on a*

$$p_1 = c'(y^1).$$

Démonstration. Pour $y^1 = g_j^1(p)$, le profit $p_1 y^1 - c(y^1)$ est maximal, donc la dérivée par rapport à y^1 nulle:

$$p_1 - c'(y^1) = 0.$$

Interprétation en termes de coût marginal.

8. Le modèle de l'économie de propriété privée

Une économie de propriété privée consiste est définie par la donnée de ℓ biens, m consommateurs, et n firmes (ou producteurs).

Le consommateur i est caractérisé par sa fonction de demande f_i, ses ressources ω_i, et par la possession de la part $\theta_{ij} \geq 0$ de la firme j.

La firme j est caractérisée par sa fonction d'activité g_j.

On parle du modèle de l'économie de propriété privée de la production quand les parts θ_{ij} sont fixées une fois pour toute, mais les ressources individuelles $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ variables.

8.1. Définition de l'équilibre

Etant donné le vecteur prix $p \in S$, l'activité de la firme j est égale à $g_j(p)$, et son profit à $p \cdot g_j(p)$. La firme j distribue la part $\theta_{ij} p \cdot g_j(p)$ de son profit au consommateur i.

La richesse du consommateur i est donc égale à la valeur de ses ressources augmentée des profits qui lui sont distributés par les différentes firmes dont il est (partiellement) propriétaire. Cette richesse est donc égale à

$$p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} p \cdot g_j(p).$$

La demande du consommateur i est donc égale à

$$f_i(p, p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} p \cdot g_j(p)).$$

La demande totale est alors égale à

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p, p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} p \cdot g_j(p)).$$

L'offre totale est égale à

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} g_j(p).$$

Le vecteur prix $p \in S$ est un **vecteur prix d'équilibre** de l'économie de propriété privée précédemment définie si l'égalité

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p, p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} p \cdot g_j(p)) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} g_j(p)$$

est satisfaite.

8.2. Notion d'optimum de Pareto

Dans le cas d'une économie avec production (comme c'est le cas pour une économie avec propriété privée de la production), une allocation est un $m + n$-uple

$$(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

On dit que l'allocation (x, y) est **faisable** si l'on a

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{i=1}^{m} + \sum_{j=1}^{n} .$$

On dit que l'allocation (x, y) est un Pareto optimum s'il n'existe pas d'allocation faisable (x', y') qui vérifie les inégalités

$$u_i(x_i) \leq u_i(x_i') \quad \text{pour tout } i\text{, une inégalité au moins étant stricte}$$

Comparer avec la définition d'un optimum de Pareto pour une économie d'échange.

Enfin, si le vecteur prix $p \in S$ est un **vecteur prix d'équilibre** de l'économie de propriété privée définie par les ressources $\omega = (\omega_i)$ et les parts $\theta = (\theta_{ij})$, l'allocation (x, y) où

$$x_i = f_i(p, p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} p \cdot g_j(p))$$

et

$$y_j = g_j(p)$$

est l'**allocation d'équilibre** correspondante.

8.3. Les deux grandes propriétés classiques des économies avec propriété privée de la production

Existence de l'équilibre

Proposition 13. *Toute économie avec propriété privée de la production admet au moins un vecteur prix d'équilibre.*

Les deux théorèmes de l’économie du bien-être

Proposition 14 (Premier théorème de l’économie du bien-être). *Toute allocation d’équilibre* (x, y) *dans une économie avec propriété privée de la production est un optimum de Pareto.*

Démonstration. Par définition, il existe un vecteur prix $p \in S$ tel que l’on ait:

$$
\begin{gathered}
x_i = f_i\big(p, p \cdot (\omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} y_j)\big) \\
y_j = g_j(p) \\
\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} y_j
\end{gathered}
$$

Supposons qu’il existe (x', y') faisable tel que

$$u_i(x_i) \leq u_i(x'_i)$$

une inégalité au moins étant stricte.

Le vecteur prix $p \in S$ supporte le panier de biens x_i. Par conséquent, l'inégalité précédente sur les utilités implique l'inégalité

$$p \cdot x_i \leq p \cdot x_i'$$

une de ces inégalités au moins étant stricte.

En outre, il resulte de la définition de y_j que l'on a

$$p \cdot y_j' \leq p \cdot y_j.$$

On a

$$p \cdot x_i = p \cdot \omega_i + p \cdot \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} y_j$$

d'où

$$p \cdot \omega_i + p \cdot \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} y_j \leq p \cdot x_i'$$

Additionnons membre à membre ces inégalités. On obtient

$$p \cdot (\sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} y_j) < p \cdot (\sum_{i=1}^{m} x_i')$$

Comme on a aussi

$$p \cdot (\sum_{i=1}^{m} x'_i) \leq p \cdot (\sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} y'_j) \leq p(\sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} y_j)$$

il vient

$$p \cdot (\sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} y_j) < p(\sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} y_j),$$

d'où une contradiction.

Proposition 15 (Deuxième théorème de l'économie du bien-être). *Pour tout optimum de Pareto* (x, y) *dans le modèle avec propriété privée de la production, il existe une économie avec propriété privée de la production définie par les ressources individuelles* $\omega = (\omega_i)$ *(on rappelle que les parts de propriétés* θ_{ij} *sont données) dont l'allocation* (x, y) *est une allocation d'équilibre.*

Démonstration. On se limite au cas où les frontières efficaces des ensembles de production Y_j sont définies par des équations du type $H_j = y^1 - h_j(y^2, \ldots, y^\ell) = 0$.

Montrons qu'en un tel optimum de Pareto, les vecteurs $Du_i(x_i)$ et $DH_j(y_j)$ sont tous colinéaires auxquel cas ces vecteurs sont alors colinéaires avec un vecteur prix $p \in S$.

On applique des idées vues un peu plus haut, à savoir que si $(x_i, y_j)_{i,j}$ est un optimum de Pareto, si on fixe les composantes x_i ou y_j correspondant à un sous-ensemble des agents, les composantes qui restent variables définissent encore un optimum de Pareto pour l'ensemble restant des agents, consommateurs et producteurs. Par conséquent, en fixant les composantes de tous les consommateurs sauf un, et les composantes de tous les producteurs sauf un, on est ramené au cas particulier d'un couple formé d'un seul consommateur et d'un seul producteur.

Comme on sait que les composantes d'un optimum de Pareto relativement aux consommateurs sont toutes supportées par un même vecteur prix p, il en résulte que la composante relative au producteur considéré dans l'exemple «un consommateur-un producteur» est aussi supportée par le vecteur prix p. Cette propriété étant vraie pour chaque producteur dans l'économie, ceci termine la démonstration du cas général du théorème.

Etude du cas particulier: un consommateur et un producteur

Le couple (x_1, y_2) est un optimum de Pareto s'il n'existe pas de couple (x'_1, y'_2) tel que $x'_1 - y'_2 \leq x_1 - y_2$, y_2 et $y'_2 \in Y_2$, et $u_1(x'_1) > u_1(x_1)$.

Il en résulte que y_2 est une production efficace. Sinon, il existe $y'_2 \in Y_2$ avec $y_2 < y'_2$. Il suffit alors de prendre $x'_1 = x_1 + (y'_2 - y_2)$.

Posons $x_1 - y_2 = r$. Le couple (x_1, y_2) est un optimum de Pareto si (x_1, y_2) est solution du problème:

$$\text{Maximiser} \quad u_1(y_2 + r)$$

sous la contrainte

$$y_2 \in Y_2.$$

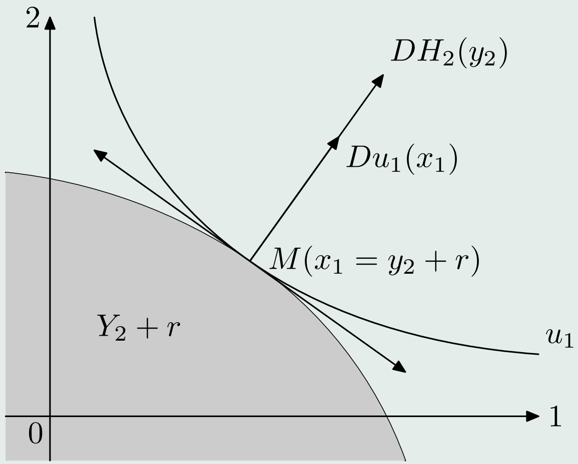
On peut écrire ce problème sous la forme équivalente

$$\text{Maximiser} \quad u_i(x_1)$$

sous la contrainte

$$x_1 \in r + Y_2,$$

problème dont l'interprétation géométrique est immédiate.



Le lagrangien s'écrit

$$u_1(x_1) - \nu\big(y_2^1 - h(y_2^2, \ldots, y_2^\ell)\big)$$

ce qui donne à l'aide des conditions du premier ordre

$$Du_1(x_1) = \nu DH_2(y_2),$$

ce qui établit la colinéarité des vecteurs $Du_1(x_1)$ et $DH_2(y_2)$.

Nous avons donc démontré que si $(x_i, y_j)_{i,j}$ est un optimum de Pareto, les allocations x_i et y_j sont toutes supportées par le même vecteur prix p.

Le profit $p \cdot y_j$ de l'entreprise j est réparti entre les différents consommateurs suivant la clé de répartition définie par les θ_{ij}. Le consommateur i reçoit

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot y_j.$$

Il suffit alors de poser

$$\omega_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} y_j.$$

On a clairement

$$\sum_i x_i = \sum_i \omega_i + \sum_j y_j,$$

ce qui combiné avec la définition de $y_j = g_j(p)$ et $x_i = f_i(p, p \cdot x_i)$ entraine que p est bien un vecteur prix d'équilibre de l'économie avec propriété privée de la production, et ressources individuelles définies par le vecteur $\omega = (\omega_i)$.

9. Conclusions

L'étude du modèle d'Arrow-Debreu ne se limite pas aux seules propriétés que sont l'existence et les deux théorèmes de l'économie du bien-être. Ceci étant, la plupart des enseignements de microéconomie se limitent à la partie du modèle d'Arrow-Debreu qui traite de ces seules propriétés.

En effet, l'étude des autres propriétés comme la stabilité de l'équilibre, le nombre d'équilibres et les implications de ce nombre sur la stabilité structurelle de ces équilibres, et plus généralement l'étude des propriétés dites de statique comparative exigent un investissement mathématique beaucoup plus important.

Outre cet aspect essentiellement technique, le modèle d'Arrow-Debreu est plutôt discret quant aux mécanismes par lesquels le ou les marchés atteignent ces fameux prix d'équilibre. Ces questions sont certes considérées comme relativement secondaires dans certaines questions, en macroéconomie par exemple. Mais il n'en est pas de même pour les thèmes de la théorie microéconomique moderne comme la théorie des enchères, la théorie des contrats, et l'organisation industrielle, thèmes pour lesquels l'importance de la formation des prix est centrale.

Références

Debreu. Théorie de la Valeur, Dunod.

Malinvaud. Leçons de théorie microéconomique, Dunod.