

PLAN DETAILLE ET COMPLEMENTS

Séance n°3

Écoulements supersoniques permanents autour de corps
de géométrie complexe

Écoulements dans les tuyères et les souffleries

1 ECOULEMENTS SUPERSONIQUES PERMANENTS AUTOUR DE CORPS DE GEOMETRIE COMPLEXE

1.1 Introduction

...

1.1.1 Écoulements autour d'engins en vol supersonique

...

1.1.2 Jets supersoniques

...

1.2 Théorie des ondes de choc obliques

1.2.1 Equations fondamentales

...

1.2.2 Ondes de choc obliques dans les gaz parfaits

...

1.3 Changement progressif de direction d'un écoulement supersonique - ondes de détente de Prandtl-Meyer

2 ECOULEMENTS DANS LES TUYERES ET LES SOUFFLERIES

2.1 Introduction

...

2.2 Relation entre la section et le rapport de détente pour un écoulement isentropique

...

2.3 Régimes d'écoulement dans une tuyère à col

...

2.4 Les différents types de soufflerie

...

3 EXERCICES

3.1 Exercice n°1

On considère une aile d'avion en forme de V de demi-angle au sommet 20° se déplaçant à Mach M_1 . On supposera que la vitesse de déplacement de l'avion se trouve dans le plan de symétrie de l'aile et qu'elle est perpendiculaire à l'arête de cette dernière.

Questions

1. On observe un choc faible partant de l'arête de l'aile et qui fait avec la direction du mouvement un angle de 45° . Quelle est alors la valeur du nombre de Mach M de part et d'autre du choc ? Déterminer le rapport des pressions et des températures de part et d'autre du choc (on prendra $\gamma = 1.4$).

2. On observe maintenant un choc non pas oblique et attaché à l'arête de l'aile, mais normal au plan de symétrie de l'aile et situé devant son arête. Que peut on dire sur le nombre de Mach ?

3.2 Exercice n°2

Un écoulement supersonique caractérisé par un nombre de Mach M_1 impacte un mur plan qui fait un angle de 10° par rapport à la direction de l'écoulement. L'écoulement est supposé permanent.

Question : Calculer de façon approchée le nombre de Mach et la pression sur chacune des deux faces du mur.

Données : $M_1 = 2$, $p_1 = 10^5$ Pa, $\gamma = 1.4$

4 ANNEXE 1 : ANALYSE DES CHOCS TRES FAIBLES

On considère ici un écoulement supersonique à Mach M_1 qui doit subir une déflexion δ très faible au travers d'un choc, lui aussi très faible, d'angle α . On a montré en cours que l'on avait la relation suivante :

$$\tan \delta = \frac{2}{\tan \alpha} \frac{M_1^2 \sin^2 \alpha - 1}{2 + M_1^2 (\gamma + \cos 2\alpha)}$$

On constate aisément que, lorsque δ tend vers 0, $M_1^2 \sin^2 \alpha$ tend vers 1, c'est-à-dire que α tend vers l'angle α_M des ondes de Mach, défini par :

$$\sin \alpha_M = \frac{1}{M_1}$$

On va chercher ici à trouver une relation entre $\sin \alpha$, $\sin \alpha_M$ et δ . Pour cela, pour les faibles valeurs de δ , on écrit des développements limités de la relation précédente en fonction de $\tan \delta$. On a :

$$\tan \delta = \frac{2}{\tan \alpha} \frac{M_1^2 \sin^2 \alpha - 1}{2 + M_1^2 (\gamma + 1 - 2 \sin^2 \alpha)} = \frac{2}{\tan \alpha} \frac{M_1^2 \sin^2 \alpha - 1}{2 (M_1^2 \sin^2 \alpha - 1) + (\gamma + 1) M_1^2}$$

soit :

$$\tan \delta \tan \alpha [2 (M_1^2 \sin^2 \alpha - 1) + (\gamma + 1) M_1^2] = 2 [M_1^2 \sin^2 \alpha - 1]$$

ou encore :

$$2 (M_1^2 \sin^2 \alpha - 1) (1 + \tan \delta \tan \alpha) = (\gamma + 1) M_1^2 \tan \delta \tan \alpha$$

d'où l'on tire :

$$M_1^2 \sin^2 \alpha - 1 = \frac{1}{2} \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \tan \delta \tan \alpha}{(1 + \tan \delta \tan \alpha)}$$

Si on effectue un développement limité du terme de droite en $\tan \delta$ au voisinage de zéro, on a :

$$M_1^2 \sin^2 \alpha - 1 = \frac{1}{2} (\gamma + 1) M_1^2 \tan \alpha \tan \delta + O(\tan^2 \delta)$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} M_1 \sin \alpha &= \left[1 + \frac{1}{2} (\gamma + 1) M_1^2 \tan \alpha \tan \delta + O(\tan^2 \delta) \right]^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{4} (\gamma + 1) M_1^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta) \end{aligned}$$

qu'on peut ré-écrire :

$$\sin \alpha = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{4} (\gamma + 1) M_1 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)$$

On va chercher à exprimer successivement $\sin \alpha$ puis $\cos \alpha$ en fonction des puissances successives de $\tan \delta$:

$$\left(1 - \frac{1}{4} (\gamma + 1) M_1 \frac{1}{\cos \alpha} \tan \delta \right) \sin \alpha = \frac{1}{M_1} + O(\tan^2 \delta)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\sin \alpha &= \frac{\frac{1}{M_1} + O(\tan^2 \delta)}{\left(1 - \frac{1}{4}(\gamma + 1) M_1 \frac{1}{\cos \alpha} \tan \delta\right)} \\
&= \left(\frac{1}{M_1} + O(\tan^2 \delta)\right) \left(1 + \frac{1}{4}(\gamma + 1) M_1 \frac{1}{\cos \alpha} \tan \delta\right) \\
&= \frac{1}{M_1} + \frac{1}{4} \frac{\gamma + 1}{\cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)
\end{aligned}$$

Si on écrit maintenant $\cos \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^{1/2}$ il vient :

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \left(1 - \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{4} \frac{\gamma + 1}{\cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)\right)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{M_1^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\cos \alpha} M_1 \tan \delta + O(\tan^2 \delta)\right)\right)^{1/2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{M_1 \cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)\right)^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{M_1}{M_1^2 - 1} \frac{\gamma + 1}{\cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)\right)^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{M_1}{M_1^2 - 1} \frac{\gamma + 1}{\cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)\right)
\end{aligned}$$

En combinant les deux expressions de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ on en déduit :

$$\begin{aligned}
\sin \alpha &= \frac{1}{M_1} + \frac{1}{4} \frac{\gamma + 1}{\frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{M_1}{M_1^2 - 1} \frac{\gamma + 1}{\cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)\right)} \tan \delta + O(\tan^2 \delta) \\
&= \frac{1}{M_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma + 1) M_1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{M_1}{M_1^2 - 1} \frac{\gamma + 1}{\cos \alpha} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)\right) \tan \delta + O(\tan^2 \delta)
\end{aligned}$$

soit :

$$\sin \alpha = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma + 1) M_1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)$$

ou encore puisque :

$$\begin{cases} \sin \alpha_M = \frac{1}{M_1} \\ \cos \alpha_M = \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1} \end{cases}$$

on obtient en définitive :

$$\sin \alpha = \sin \alpha_M + \frac{1}{4} \frac{(\gamma + 1)}{\cos \alpha_M} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)$$

Pour les nombres de Mach compris entre 1.4 et 20 et des déflexions inférieures à 6° , la relation précédente permet d'estimer α avec une précision de l'ordre de 1° .

On peut maintenant calculer la variation de pression dans un choc très faible tel que $\delta \simeq 0$ en utilisant la relation précédente. On a vu que l'on pouvait toujours écrire :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \sin^2 \alpha - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

soit :

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \alpha - 1)$$

Si on utilise le développement limité précédent en $\tan \alpha$, on voit que :

$$M_1^2 \sin^2 \alpha = 1 + \frac{1}{2} \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)$$

ce qui donne :

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{1}{2} \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \tan \delta + O(\tan^2 \delta) \right)$$

soit :

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \tan \delta + O(\tan^2 \delta)$$

De même, le calcul de la variation d'entropie dans un choc très faible donne :

$$\frac{s_2 - s_1}{C_p} = \frac{(\gamma^2 - 1) M_1^6}{12 (M_1^2 - 1)^{3/2}} \tan^3 \delta + O(\tan^4 \delta)$$

ce qui montre que, dans les choc très faibles, on peut faire avec une très bonne approximation l'hypothèse d'écoulement isentropique.

5 Annexe 2 Variations progressives de section : la fonction de Prandtl-Meyer

Lorsqu'un écoulement supersonique doit changer progressivement de direction, il le fait au travers d'une succession de déflexions infinitésimales de type ondes de Mach. On peut alors appliquer les relations linéarisées établies dans l'annexe 1 et supposer de plus que l'écoulement reste isentropique. Ainsi, on a vu que la variation de pression peut s'écrire, pour une déflexion infinitésimale :

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} d\delta$$

conduisant à une compression si $d\delta > 0$, c'est-à-dire si la déflexion réduit la section de passage de l'écoulement et à une détente si $d\delta < 0$, c'est-à-dire si la déflexion augmente la section de passage (élargissement). Comme l'écoulement peut être considéré comme isentropique, on peut appliquer l'expression du bilan de quantité de mouvement établie pour les écoulements isentropiques :

$$dp + \rho u du = 0$$

et comme :

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

on voit que :

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{u^2}{c^2} \frac{du}{u} = -\gamma M^2 \frac{du}{u}$$

ce qui donne :

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} d\delta$$

On retrouve maintenant que, si la section de passage augmente ($d\delta < 0$) la vitesse augmente puisqu'on est en écoulement supersonique (c'est l'inverse si la section de passage diminue). On va maintenant chercher à relier la variation de la déflexion à la variation du nombre de Mach. Pour cela on écrit que :

$$u = Mc$$

et donc que :

$$\frac{du}{u} = \frac{dM}{M} + \frac{dc}{c}$$

par définition de la vitesse du son pour un gaz parfait on a :

$$2 \frac{dc}{c} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}$$

et comme l'écoulement est isentropique :

$$\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

En combinant ces deux expressions on obtient :

$$\frac{dc}{c} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{dp}{p}$$

soit :

$$\frac{dc}{c} = \frac{(\gamma - 1) M^2}{2\sqrt{M^2 - 1}} d\delta$$

en combinant les deux expressions de du/u et dc/c en fonction de $d\delta$ on en déduit :

$$\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{dc}{c} = -\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}d\delta - \frac{(\gamma-1)M^2}{2\sqrt{M^2-1}}d\delta$$

soit :

$$\frac{dM}{M} = -\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{\sqrt{M^2-1}}d\delta$$

ce qui donne :

$$d\delta = -\frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

On voit donc que dans un élargissement le nombre de Mach augmentera tandis que dans une variation conduisant à une diminution de la section de passage du fluide, le nombre de Mach diminuera. Dans l'analyse de ces écoulements faite en 1907 et 1908 par Ludwig Prandtl et son élève Theodor Meyer, ces derniers ont proposé de définir une fonction $\omega(M)$ qui correspond à un angle compté positivement dans une détente. Par définition :

$$\begin{cases} d\omega = -d\delta \\ \omega(M=1) = 0 \end{cases}$$

La fonction de Prandtl-Meyer $\omega(M)$ est alors définie par la relation :

$$\omega(M) = \int_1^M \frac{\sqrt{x^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}x^2} \frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(M^2-1) - \arctan \sqrt{M^2-1}$$

Pour un écoulement supersonique qui subit un changement progressif de section conduisant à le faire passer d'un nombre de Mach M_1 à un nombre de Mach M_2 , la déflexion totale subie par l'écoulement est alors :

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{M_1}^{M_2} -\frac{\sqrt{x^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}x^2} \frac{dx}{x} \\ &= -\int_1^{M_2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}x^2} \frac{dx}{x} + \int_1^{M_1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}x^2} \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

soit :

$$\delta = \omega(M_1) - \omega(M_2)$$

ou encore, avec des angles comptés positivement :

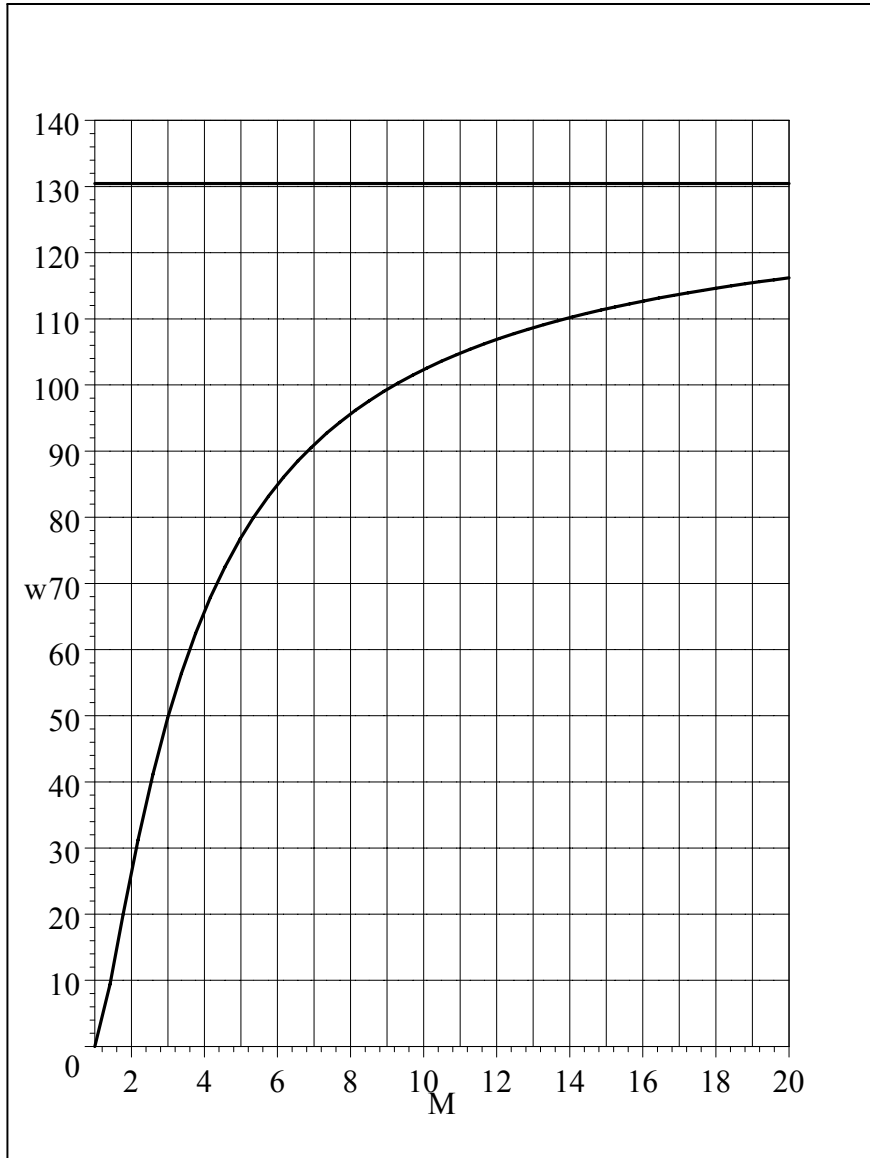
$$-\delta = \omega(M_2) - \omega(M_1)$$

Ce résultat se généralise à un élargissement brusque de section pour lequel on obtient un faisceau de détente centré. On peut remarquer que puisque :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \omega(M) = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

dans le cas d'un élargissement brusque, la déflexion maximale que peut atteindre un écoulement supersonique arrivant à M_1 est donnée par :

$$(-\delta)_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right) - \omega(M_1)$$



Représentation graphique de la fonction de Prandtl-Meyer $\omega(M)$ avec ω en degrés, à partir de son expression analytique donnée par Landau. $\omega(M_2) - \omega(M_1)$ représente la déflexion totale dans une onde de détente faisant passer le nombre de Mach de l'écoulement de M_1 à $M_2 > M_1$. Cette courbe a pour asymptote $\omega_{\max} = 130.45^\circ$ pour $\gamma = 1.4$.