PLAN DETAILLE ET COMPLEMENTS
Séance n°9
Transferts thermiques convectifs

1 Transferts thermiques en convection forcée

1.1 Ecoulement turbulent permanent en conduite avec transferts thermiques

...

1.1.1 Ecoulement permanent en conduite circulaire : la dynamique

...

1.1.2 Ecoulement permanent en conduite circulaire : la thermique

...

1.1.3 Analogie de Reynolds

...

1.2 Couches limites dynamique et thermique

...

1.2.1 Couche limite dynamique

...

1.2.2 Couche limite thermique

...

1.3 Le calcul des échangeurs thermiques

...

1.3.1 La forme macroscopique du bilan d'énergie

...

1.3.2 Echanges entre un fluide et une paroi à température constante T_0

...

1.3.3 Calcul des échangeurs plans

...

1.3.4 Définitions de l'Efficacité et Nombre d'Unités de Transfert

...

2 Transferts thermiques en convection naturelle

2.1 Introduction

...

2.2 Cavité à plafond ou à plancher chauffant

...

2.3 Plaque en atmosphère libre

...

2.4 Paroi verticale chauffée ou refroidie

...

2.5 Echange entre deux parois parallèles

...

3 ANNEXE : couche limite thermique

On considère l'équation de bilan thermique pour un écoulement en conduite en se plaçant au voisinage immédiat de la paroi et en négligeant la courbure de celle-ci. L'axe edes x désigne l'axe de l'écoulement, l'axe des y désigne l'axe perpendiculaire à la paroi. L'équation de bilan thermique s'écrit alors :

$$\overline{u}\,(y)\,\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\kappa \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} - \overline{v'T'}\right]$$

On a vu qu'avec les hypothèses suivantes :

- écoulement turbulent permanent en moyenne,
- régimes thermique et dynamique établis,
- conduction axiale négligeable,
- modèle de viscosité turbulente,
- conditions aux limites de paroi de type $\varphi =$ constante

l'équation de bilan thermique se réduit à :

$$\frac{4\varphi}{\rho C_p U D_H}\overline{u}\,(y) = \frac{d}{dy}\left[(\kappa + \kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}\right]$$

avec :

$$\theta\,(y) = \overline{T}\,(x, y) - T_p\,(x)$$

Pour intégrer cette équation, on a besoin du profil de vitesse $\overline{u}\,(y)$. On va se placer dans la couche limite et on va considérere successivement la sous-couche visqueuse puis la zone logarithmique.

Sous-couche visqueuse

Dans cette zone on a vu que le profil de vitesse est donné par :

$$\frac{\overline{u}\,(y)}{u_*} = \frac{y\,u_*}{\nu}$$

l'équation différentielle sur θ s'écrit donc :

$$\frac{d}{dy}\left[(\kappa + \kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}\right] = \frac{4\varphi}{\rho C_p U D_H}\frac{u_*^2}{\nu}y$$

et s'intègre en :

$$(\kappa + \kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy} = \frac{2\varphi}{\rho C_p U D_H}\frac{u_*^2}{\nu}y^2 + A$$

La constante d'intégration s'évalue à la paroi où l'on a :

$$\begin{cases} \kappa_t = 0 \\ \varphi = -\left.\lambda \underline{\mathrm{grad}} T\right|_{y=0} \cdot \underline{e_y} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = -\lambda \left.\frac{d\theta}{dy}\right|_{y=0} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$A = \kappa \left.\frac{d\theta}{dy}\right|_{y=0} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\left.\frac{d\theta}{dy}\right|_{y=0} = \frac{-\varphi}{\rho C_p}$$

ce qui donne :

$$(\kappa + \kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy} = \frac{-\varphi}{\rho C_p}\left(1 - \frac{2}{U D_H}\frac{u_*^2}{\nu}y^2\right)$$

que l'on peut ré-écrire :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}=\frac{-\varphi}{\rho C_p}\left(1-2\frac{\nu}{UD_H}\frac{u_*^2}{\nu^2}y^2\right)$$

ou encore :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}=\frac{-\varphi}{\rho C_p}\left(1-2\frac{1}{\mathrm{Re}_{D_H}}y^{+2}\right)$$

Puisqu'on est en turbulent déveoppé le nombre de Reynolds est très grand. Par ailleurs, dans la sous-couche visqueuse $y^+\leq 10$ donc :

$$2\frac{1}{\mathrm{Re}_{D_H}}y^{+2}\ll 1$$

donc en définitive dans la sous-couche visqueuse :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}=\frac{-\varphi}{\rho C_p}=\text{constante}$$

ce qui correspond à une équation de bilan thermique qui s'écrit :

$$\frac{d}{dy}\left[(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}\right]=0$$

Zone logarithmique

On va se placer en régime lisse. Dans ce cas, dans la zone logarithmique le profil de vitesse est donné par :

$$\frac{\overline{u}\,(y)}{u_*}=\frac{1}{K}\ln\frac{y\,u_*}{\nu}+5$$

L'équation différentielle sur θ s'écrit alors :

$$\frac{d}{dy}\left[(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}\right]=\frac{4\varphi}{\rho C_p U D_H}\left(\frac{u_*}{K}\ln\frac{y\,u_*}{\nu}+5\,u_*\right)$$

On va intégrer cette équation différentielle entre $y=\frac{10\nu}{u_*}$ et y et on va utiliser le fait que la loi linéaire et la loi logarithmique se raccordent aux environ de $y^+=10$. On obtient :

$$\int_{y=\frac{10\nu}{u_*}}^{y}\frac{d}{dy}\left[(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}\right]dy=\int_{y=\frac{10\nu}{u_*}}^{y}\frac{4\varphi}{\rho C_p U D_H}\left(\frac{u_*}{K}\ln\frac{y\,u_*}{\nu}+5\,u_*\right)dy$$

En utilisant le résultat établit plus haut pour la sous-couche viqueuse :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\left.\frac{d\theta}{dy}\right|_{y=\frac{10\nu}{u_*}}=\frac{-\varphi}{\rho C_p}$$

ce qui donne :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}+\frac{\varphi}{\rho C_p}=\frac{4\varphi}{\rho C_p U D_H}\left(\frac{y\,u_*}{K}\ln y\frac{u_*}{\nu}-\frac{y\,u_*}{K}+5\,u_*\,y-10\frac{\nu}{K}\ln 10+\frac{10\nu}{K}-50\nu\right)$$

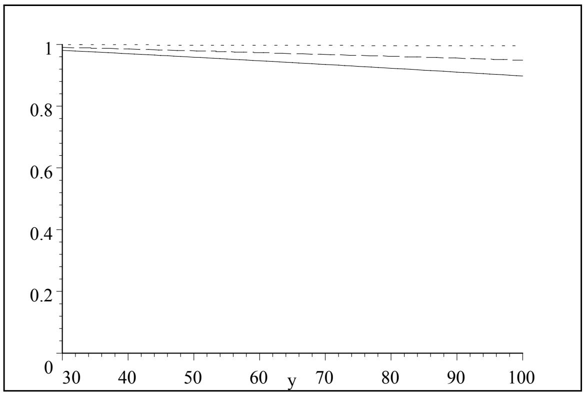
soit :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}+\frac{\varphi}{\rho C_p}=\frac{4\varphi}{\rho C_p}\frac{\nu}{U D_H}\frac{1}{K}\left(\frac{y\,u_*}{\nu}\ln\frac{y\,u_*}{\nu}-\frac{y\,u_*}{\nu}+5\,\frac{u_*\,y}{\nu}\,K-10\ln 10+10-50\,K\right)$$

qui s'écrit :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}=-\frac{\varphi}{\rho C_p}\left[1-4\frac{1}{\mathrm{Re}_{D_H}}\frac{1}{K}\left(y^+\ln y^+-y^++5\,K\,y^+-10\ln 10+10-50\,K\right)\right]$$

Expérimentalement, la zone logarithmique en vitesse ecorrespond à $30\leq y^+\leq 100$. Si on trace la fonction entre crochet au second membre pour cette plage de valeurs de y^+ et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, on obtient :



Evolution de la fonction $1-4\frac{1}{\mathrm{Re}_{D_H}}\frac{1}{K}\left(y^+\ln y^+-y^++5\,K\,y^+-10\ln 10+10-50\,K\right)$ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds (trait plein : Re=50000, pointillés : Re=100000, points : Re=1000000).

On peut donc considérer en première approcimation que, si le nombre de Reynolds est suffisamment grand, on a :

$$1-4\frac{1}{\mathrm{Re}_{D_H}}\frac{1}{K}\left(y^+\ln y^+-y^++5\,K\,y^+-10\ln 10+10-50\,K\right)\sim 1$$

On a alors dans la zone logarithmique en vitesse :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}=\frac{-\varphi}{\rho C_p}=\text{constante}$$

ce qui correspond à une équation de bilan thermique qui s'écrit :

$$\frac{d}{dy}\left[(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}\right]=0$$

En résumé, on vient de montrer que, dans la couche limite, on peut approcher l'équation de bilan thermique par l'équation :

$$\frac{d}{dy}\left[(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}\right]=0$$

ce qui revient à négliger l'influence du terme de convection. L'équation qui permet de déterminer le profil d etempérature se ramène alors à :

$$(\kappa+\kappa_t)\,\frac{d\theta}{dy}=\frac{-\varphi}{\rho C_p}=\text{constante}$$

Il permet d'établir l'existence d'un profil linéaire dans la sous-couche en conduction, puis d'une zone logarithmique.

4 EXERCICES

4.1 Isolation d'une conduite cylindrique

1. On considère une conduite cylindrique dont la paroi interne (resp. externe) a pour rayon R_i (resp. R_e). On suppose que la conduite est parcourue à l'intérieur par un fluide à la température T_0. On suppose connus les coefficients d'échange h_i avec le fluide interne, et h_e avec l'air ambiant supposé à la température T_a. On désigne par T_i (resp. T_e) les température de peau interne et externe de la conduite. L'émissivité de la conduite est supposée négligeable de sorte qu'on peut négliger le rayonnement. On désigne par ϕ la puissance thermique perdue par unité de longueur de conduite ($\phi > 0$ si $T_0 > T_a$). En utilisant la méthode des résistances thermiques, exprimer, en régime permanent, ϕ en fonction de la conductivité thermique λ du matériau qui constitue la paroi, et des autres variables du problème. En supposant R_i connu et constant, tracer l'allure de la courbe $\phi(R_e)$. Montrer que ϕ est maximum pour $R_e = R_c$ dont on donnera l'expression. R_c s'appelle le rayon critique d'isolation. Commenter l'évolution de ϕ suivant que le rayon est inférieur ou supérieur à R_c.

2. On cherche à isoler une conduite cylindrique verticale de diamètre intérieur $D = 1\,\mathrm{m}$, de telle sorte que sa température extérieure soit de $60\,^\circ\mathrm{C}$. L'émissivité de la surface extérieure est supposée faible afin de pouvoir négliger le rayonnement. Le milieu ambiant est de l'air à $10\,^\circ\mathrm{C}$. On suppose connue la température de peau interne T_i. Estimer le rayon critique d'isolation dans les deux cas suivants :

- la paroi est constituée entièrement d'acier inox de conductivité thermique $\lambda_a = 21\,\mathrm{W/m/^\circ C}$;
- la paroi est constituée d'une épaisseur négligeable d'acier puis de laine de verre de conductivité thermique $\lambda_i = 0.05\,\mathrm{W/m/^\circ C}$.

Dans le second cas, déterminer l'épaisseur d'isolant nécessaire sachant que la température interne de la paroi est $T_i = 300\,^\circ\mathrm{C}$, et calculer les pertes thermiques associées.

Données numériques pour l'air : $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} = 0.71$, $\nu = 1.5\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, $\beta = \frac{1}{T}\,\mathrm{K^{-1}}$, $\lambda = 2\times10^{-2}\,\mathrm{W/m/K}$

4.2 Comparaison de l'efficacité d'un simple et d'un double vitrage

1. Simple vitrage

On considère une vitre d'épaisseur $e = 3\,\mathrm{mm}$ qui sépare une pièce chauffée à une température $T_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ de l'air extérieur qui se trouve à une température $T_2 = 0\,^\circ\mathrm{C}$. On suppose qu'il n'y a pas de vent et que la vitre est assez haute pour que les écoulements de convection naturelle de part et d'autre de cette dernière soient turbulents ($\mathrm{Gr} > 10^9$).

Montrer que la résistance thermique du verre de la vitre est négligeable devant la résistance thermique des couches d'air en mouvement de part et d'autre. En déduire la valeur de la puissance échangée entre l'intérieur et l'extérieur par unité de surface de vitre. Calculer la température de paroi de la vitre côté intérieur.

Donnée numérique : On prendra pour le verre $\lambda_v = 1\,\mathrm{W/m/K}$ et pour l'air $\mathrm{Pr} = \frac{\nu_a}{\kappa_a} = 0.71$, $\nu_a = 1.5\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, $\beta_a = \frac{1}{300}\,\mathrm{K^{-1}}$, $\lambda_a = 2\times10^{-2}\,\mathrm{W/m/K}$.

2. Double vitrage

On double le vitrage étudié en 1. par une seconde vitre identique, disposée parallèlement à la première et à une distance $d = 1\,\mathrm{cm}$. On suppose cette distance assez petite pour que l'écoulement soit laminaire entre les deux vitres, et de vitesse suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que les échanges se font uniquement par conduction dans la lame d'air.

Calculer la puissance échangée et la température de la paroi intérieure de la vitre (celle qui donne à l'intérieur de la pièce). Que peut-on en déduire ?

N.B. : une résolution itérative sera nécessaire pour ce cas.