

DEVOIR

Perdue par une froide nuit d'hiver...

Enoncé

On s'intéresse aux déperditions thermiques à travers une baie vitrée par une froide nuit d'hiver. On considère la façade sud d'un bâtiment constituée d'un mur supposé parfaitement isolé dans lequel est encastrée une baie vitrée en double vitrage constituée de deux vitres de 4 mm d'épaisseur (notée e_v) séparées par une lame d'air de 8 mm d'épaisseur (notée e_a). La façade mesure 7 m de long, la baie vitrée, de hauteur $H = 1.5$ m et de longueur $L = 3$ m, est placée au centre. On notera S la surface totale de la baie, Cf. figure 1. La température extérieure, notée T_e , est de -10°C , la façade est léchée par un vent de 5 m/s orienté parallèlement à celle-ci. La température intérieure, notée T_i , est de 20°C . On se propose de calculer la puissance thermique perdue à travers la baie vitrée.

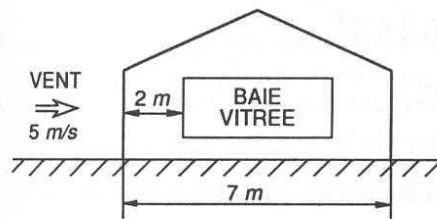


Figure 1 : schéma de la baie vitrée.

Hypothèses de modélisation

1. On considérera que la lame d'air comprise entre les deux vitres reste immobile et que le transfert se fait uniquement par rayonnement et conduction.
2. On admettra que, compte tenu des longueurs d'onde du rayonnement mis en jeu ici, le vitrage peut être considéré comme opaque à ce rayonnement (en pratique, pour le verre $\tau_\lambda = 0$ si $\lambda > 3 \mu\text{m}$).
3. On assimilera toutes les surfaces solides à des corps noirs.

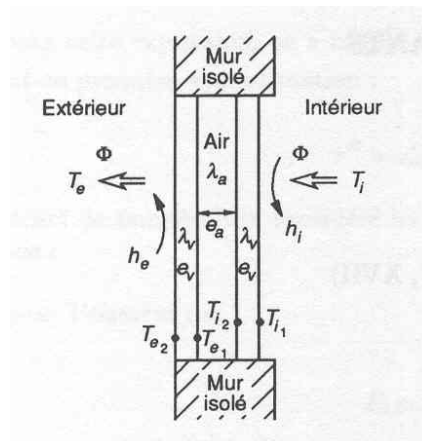


Figure 2 : définition des températures intermédiaires.

On notera Φ la puissance thermique perdue à travers la baie vitrée. On introduira les différentes températures intermédiaires définies sur la figure 2.

Données physiques

Air : $\nu_a = 1.3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_a = 2.5 \times 10^{-2} \text{ W/m/K}$, $\text{Pr} = 0.71$.

Verre : $\lambda_v = 0,78 \text{ W/m/K}$.

1. On considère la puissance thermique échangée par rayonnement à l'intérieur de la lame d'air, notée Φ_R . Compte tenu des hypothèses faites, montrer que l'on a :

$$\Phi_R = Sh_R (T_{i2} - T_{e1})$$

et donner l'expression exacte de h_R . Compte tenu des écarts de température modérés mis en jeu dans ce problème, montrer qu'on peut approcher h_R par :

$$h_R = 4\sigma T_{m,a}^3$$

avec $T_{m,a}$, température moyenne de la lame d'air, définie par :

$$T_{m,a} = \frac{T_{i2} + T_{e1}}{2}$$

2. Montrer que sur la paroi intérieure de la baie on a :

$$\Phi = Sh_i^{CN} (T_i - T_{i1}) + S\sigma (T_i^4 - T_{i1}^4)$$

Linéariser l'expression de Φ sous la forme :

$$\Phi = Sh_i (T_i - T_{i1})$$

et exprimer h_i en fonction de h_i^{CN} , σ et $T_{m,i}$ défini par :

$$T_{m,i} = \frac{T_i + T_{i1}}{2}$$

Préciser l'expression de h_i^{CN} en fonction du nombre de Rayleigh Ra, en supposant que l'écoulement de convection naturelle le long de la paroi interne de la baie vitrée est turbulent.

3. Faire le même raisonnement sur la paroi externe. On notera h_e le coefficient de linéarisation de Φ en fonction de $S(T_{e2} - T_e)$. Exprimer le coefficient h_e en fonction du coefficient d'échange par convection forcée sur la paroi externe h_e^{CF} , de σ et de $T_{m,e}$ défini par :

$$T_{m,e} = \frac{T_e + T_{e2}}{2}$$

En utilisant la corrélation donnée en annexe, calculer numériquement h_e^{CF} .

4. En utilisant les résultats précédents et en prenant en compte le transfert conductif dans le verre et dans la lame d'air, exprimer Φ/S en fonction de $T_i - T_e$, h_i , h_e , h_R , λ_a , λ_v , e_a et e_v .

5. L'équation obtenue en 4. est non linéaire. On se propose de la résoudre par une méthode itérative. On se donne une répartition initiale de température, on en déduit Φ/S et on calcule la nouvelle répartition de température correspondante. On aura convergé lorsque cette répartition de température n'évoluera plus au cours des itérations.

Première itération : on part de la répartition de température suivante :

$$\begin{cases} T_{i1} = 10^\circ\text{C} \\ T_{i2} = 10^\circ\text{C} \\ T_{e1} = 0^\circ\text{C} \\ T_{e2} = 0^\circ\text{C} \end{cases}$$

NB : le verre étant beaucoup plus conducteur que l'air, on peut considérer, en première approximation, que l'écart de température dans les vitres est négligeable, on pourra le vérifier a posteriori.

Calculer alors Φ/S et en déduire la nouvelle répartition de température.

Seconde itération : reprendre le calcul avec cette nouvelle répartition et calculer Φ/S et les nouvelles températures obtenues. Conclure.

6. Refaire le calcul de Φ/S pour un simple vitrage. Commenter les avantages du double vitrage. Justifier a posteriori l'hypothèse (1).

ANNEXE – Corrélation pour l'échange thermique sur une paroi plane dont une partie seulement est chauffée

Ecoulement turbulent ($Re_x = \frac{Vx}{\nu} > 3 \times 10^5$)

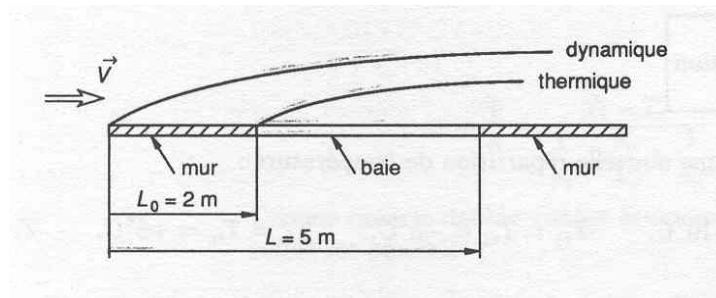


Figure 3 : couches limites sur la façade.

$$Nu_L = 0.028 \times Re_L^{0.8} \times Pr^{1/3} \times \left[1 + 0.4 \left(\frac{L_0}{L} \right)^{2.75} \right]$$