PLAN DETAILLE ET COMPLEMENTS
Séance n$^\circ$1
Introduction aux écoulements compressibles

1 RAPPELS DE THERMODYNAMIQUE

1.1 Introduction

1.1.1 Système thermodynamique

...

1.1.2 Variables d'état

...

1.2 Premier et second principes

1.2.1 Premier principe pour un système fermé (énergie interne)

...

1.2.2 Premier principe pour un système ouvert (enthalpie)

...

1.2.3 Second principe

...

1.2.4 Quelques relations utiles

...

1.2.5 Energie libre et enthalpie libre

...

1.3 Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

1.3.1 Loi d'état

...

1.3.2 Expression de l'énergie interne

...

1.3.3 Expression de l'enthalpie

...

1.3.4 Expression de l'entropie

...

1.3.5 Mélange de Gaz Parfait

...

1.4 Un exemple : les propriétés thermodynamiques de l'air

2 INTRODUCTION AUX ECOULEMENTS COMPRESSIBLES

2.1 Equations générales

2.1.1 Théorème de Leibniz

...

2.1.2 Bilan de masse

...

2.1.3 Bilan de quantité de mouvement

...

2.1.4 Bilan d'énergie

...

2.2 La vitesse du son

2.2.1 Cas particulier : propagation des ondes sonores dans un milieu au repos

...

2.2.2 Généralisation et définition

...

2.3 Une première classification des écoulements

2.4 L'écoulement isentropique : une approximation classique en écoulement compressible

2.4.1 Cadre de l'approximation

...

2.4.2 Ecoulement permanent isentropique

...

2.5 La méthode des caractéristiques appliquée aux écoulements compressibles

2.5.1 Bilan de masse en conduite à section variable

...

2.5.2 Système d'équations et analyse par la méthode des caractéristiques

...

3 EXERCICES

3.1 Exercice 1

On considère un tunnel de section $A = 10\,\mathrm{m}^2$ à l'intérieur duquel se produit une explosion. On considère que la zone concernée par l'explosion correspond à un tronçon de tunnel de longueur $L = 10\,\mathrm{m}$. Cette explosion dégage une énergie $\Delta Q = 250\,\mathrm{MJ}$ de façon uniforme dans la zone concernée et pendant un intervalle de temps δt très court (on supposera en particulier que cet intervalle de temps n'est pas suffisant pour qu'il puisse y avoir une mise en mouvement du fluide).

Question : calculer la pression et la température immédiatement après l'explosion

Données : avant l'explosion la température et la pression sont les suivantes : $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

3.2 Exercice 2

On considère un engin se déplaçant à la vitesse v dans l'atmosphère qui sera assimilée à un gaz parfait à la température T_∞.

Question : en négligeant la viscosité et la thermoconduction, calculer l'ordre de grandeur de la température d'arrêt au nez de l'engin dans les deux cas suivants : cas 1 : l'avion vole à basse altitude à Mach 1 ou 2, cas 2 : il s'agit de la navette spatiale rentrant dans l'atmosphère.

Données : la vitesse à laquelle la navette spatiale rentre dans l'atmosphère est de l'ordre de la vitesse de libération, i.e., environ $10\,\mathrm{km/\,s}$.

4 ANNEXES

4.1 Annexe 1 - Bilan d'énergie pour un écoulement compressible

4.1.1 Bilan d'énergie cinétique

On part du bilan de quantité de mouvement vu en cours et écrit en projection sur chaque axe $\underline{e}_i$ d'un repère cartésien :

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

NB : dans l'expression précédente et dans toute la suite on utilisera la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Cela signifie par exemple que la notation $u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ signifie en fait $\sum_j u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Pour obtenir l'énergie cinétique, il est nécessaire de multiplier le bilan de quantité de mouvement suivant $\underline{e}_i$ par la vitesse u_i :

$$\rho u_i\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho u_i g_i$$

qui s'écrit encore :

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_i^2\right) + \rho u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}u_i^2\right) = u_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho u_i g_i$$

Si on utilise le bilan de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho u_j u_i^2\right) &= u_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho u_i g_i \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\sigma_{ij}\right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\sigma_{ij} + \rho u_i g_i
\end{aligned}$$

ou encore en indiquant explicitement les sommations :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u_i^2\right) + \sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho u_j u_i^2\right) = \sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\sigma_{ij}\right) - \sum_i\sum_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\sigma_{ij} + \rho u_i g_i$$

En posant d_{ij} les composantes du tenseur des taux de déformation, on peut exprimer le produit contracté du tenseur des contraintes et du tenseur des taux de déformation sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\sigma}} = \sum_i\sum_j d_{ij}\sigma_{ij} = \sum_i\sum_j\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\sigma_{ij}$$

Compte tenu de la symétrie du tenseur des taux de déformations ainsi que du tenseur des contraintes, on montre aisément que :

$$\underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\sigma}} = \sum_i\sum_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

Si on reporte cette expression dans l'équation de bilan d'énergie cinétique, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u_i^2\right) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho u_j u_i^2\right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\sigma_{ij}) - \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\sigma}} + \rho u_i g_i$$

soit en définitive sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \underline{v}^2\right) + \mathrm{div}\left[\left(\frac{1}{2}\rho \underline{v}^2\right)\underline{v}\right] = \mathrm{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{v}\right) - \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\sigma}} + \rho\underline{g}\cdot\underline{v}$$

Cette équation constitue le bilan d'énergie cinétique pour l'écoulement.

4.1.2 Bilan d'énergie interne

L'énergie potentielle a déjà été prise en compte puisqu'on a considéré une force extérieure de gravité $\underline{g}$. Donc l'énergie totale massique s'écrit :

$$e_t = e + \frac{1}{2}\underline{v}^2$$

où e désigne l'énergie interne. L'énergie totale sur un volume de contrôle Ω s'obtient quant à elle par :

$$E_t = \int_\Omega \rho e_t \, d\Omega$$

Le premier principe indique que :

$$dE_t = \delta W + \delta Q$$

où δW et δQ représentent respectivement le travail des forces extérieures et la chaleur transmise au système. On peut également écrire :

$$\frac{dE_t}{dt} = \dot{W} + \dot{Q}$$

avec $\dot{W}$ la puissance des forces extérieures et $\dot{Q}$ la puissance thermique transmise au système. Le théorème de Leibniz permet alors d'écrire ($\underline{n}$ normale extérieure) :

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho\underline{v}^2\right) d\Omega + \int_{\partial\Omega}\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho\underline{v}^2\right)(\underline{v}\cdot\underline{n})\, d\Gamma = \dot{W} + \dot{Q}$$

ou encore :

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho\underline{v}^2\right) d\Omega + \int_{\partial\Omega}\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho\underline{v}^2\right)(\underline{v}\cdot\underline{n})\, d\Gamma = \ldots$$

$$\ldots = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\cdot\underline{v}\, d\Gamma + \int_\Omega \rho\underline{g}\cdot\underline{v}\, d\Omega}_{\text{puissance des forces extérieures}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\int_{\partial\Omega} -\underline{q}\cdot\underline{n}\, d\Gamma + \int_\Omega S\, d\Omega}_{\text{puissance thermique transmise au système}}$$

où $\underline{q}$ désigne le vecteur flux de chaleur et S un éventuel terme source volumique (par exemple dans le cas d'une réaction chimique au sein de l'écoulement). En transformant les intégrales sur la surface en intégrales volumiques, puis en écrivant que l'égalité doit être vérifiée quelque soit le volume de contrôle matériel Ω, on obtient en définitive le bilan local d'énergie totale sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e+\frac{1}{2}\rho \underline{v}^2\right)+\operatorname{div}\left[\left(\rho e+\frac{1}{2}\rho \underline{v}^2\right)\underline{v}\right]=\operatorname{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{v}\right)+\rho\underline{g}\cdot\underline{v}-\operatorname{div}\underline{q}+S$$

Si on retranche à l'équation précédente l'équation de bilan d'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \underline{v}^2\right)+\operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{2}\rho \underline{v}^2\right)\underline{v}\right]=\operatorname{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{v}\right)-\underline{\underline{d}}:\underline{\underline{\sigma}}+\rho\underline{g}\cdot\underline{v}$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+\operatorname{div}\left[\rho e\underline{v}\right]=\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S$$

Compte tenu du bilan de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\left[\rho\underline{v}\right]=0$$

et du fait que :

$$\underline{\underline{\sigma}}=-p\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\tau}}$$

On obtient finalement le bilan d'énergie interne massique soit sous la forme dite conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+\operatorname{div}\left[\rho e\underline{v}\right]=-p\operatorname{div}\underline{v}+\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S$$

soit sous la forme dite non conservative :

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\operatorname{grad}}e\right)=-p\operatorname{div}\underline{v}+\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S$$

4.1.3 Bilan d'enthalpie

L'enthalpie massique s'obtient à partir de l'énergie interne massique par :

$$h=e+\frac{p}{\rho}$$

Si on repart du bilan d'énergie interne écrit sous forme conservative, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h-p)+\operatorname{div}\left[(\rho h-p)\,\underline{v}\right]=-p\operatorname{div}\underline{v}+\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)-\frac{\partial p}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho h\underline{v})-\operatorname{div}(p\underline{v})=-p\operatorname{div}\underline{v}+\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S$$

qui s'écrit encore :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\operatorname{div}(\rho h\underline{v})=\frac{\partial p}{\partial t}+\operatorname{div}(p\underline{v})-p\operatorname{div}\underline{v}+\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S$$

On obtient finalement le bilan d'enthalpie massique soit sous la forme conservative :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\operatorname{div}(\rho h\underline{v}) &= \frac{\partial p}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\operatorname{grad}}p+\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S\\ &= \frac{dp}{dt}+\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S\end{aligned}$$

soit sous la forme non conservative (compte tenu du bilan de masse) :

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\operatorname{grad}}h\right)=\frac{dp}{dt}+\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{d}}-\operatorname{div}\underline{q}+S$$

4.2 Annexe 2 - Application de la méthode des caractéristique aux écoulements isentropiques de gaz parfait

4.2.1 Rappel sur la méthode des caractéristiques

Soit le système d'équations aux dérivées partielles suivant, dit système quasi-linéaire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A\,(W)\,\frac{\partial W}{\partial x} = B\,(W)$$

où W est le vecteur de R^n contenant les variables du système, A est une matrice $n \times n$ pouvant dépendre de W (d'où l'expression de système quasi-linéaire) et B un vecteur de R^n pouvant lui aussi dépendre de W.

Par définition, le système sera dit strictement hyperbolique si la matrice A admet n valeurs propres réelles et distinctes λ_i. On peut alors construire la solution du problème en utilisant les courbes caractéristiques définies de la façon suivante :

$$\text{Famille } (C_i) \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{C_i} = \lambda_i$$

et en utilisant une relation différentielle vérifiée le long des (C_i). Cette relation différentielle s'obtient en écrivant que le système suivant est satisfait :

$$(A - \lambda_i\,\mathrm{Id})\frac{\partial W}{\partial x} = B - \left.\frac{dW}{dt}\right|_{C_i}$$

Puisque la matrice $A - \lambda_i\,\mathrm{Id}$ est indéfinie, on obtient une relation différentielle vérifiée le long de C_i par les composantes de $\frac{dW}{dt}$. Si cette relation possède une intégrale première, on dit celle-ci constitue un invariant de Riemann du système. En particulier, si la relation différentielle se met sous la forme :

$$\left. dR_i \right|_{C_i} = 0$$

alors l'invariant de Riemann R_i se conserve le long des courbes caractéristiques C_i.

La méthode des caractéristique permet une résolution élégante et analytique de certains problèmes hyperboliques simples. Elle est aussi à la base de très nombreuses méthodes numériques permettant de résoudre numériquement les systèmes hyperboliques plus complexes.

4.2.2 Application aux écoulements isentropiques de gaz parfait dans une conduite à section variable

On rappelle les hypothèses faites en cours :

- Le fluide en mouvement est assimilé à un gaz parfait.
- On considère que l'écoulement est unidimensionnel c'est-à-dire que les variables ne dépendent que de x abscisse le long de l'axe de la conduite (on désignera par v la vitesse de l'écoulement).
- L'écoulement est isentropique donc il n'y a pas de source d'irréversibilité (ni frottement, ni échanges de chaleur).
- La section A de la conduite varie avec x.

On a vu en cours que dans ce cas le bilan de masse et le bilan de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} A\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A v\right) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right.$$

A partir du bilan d'enthalpie massique établit dans l'annexe 1, on obtient facilement compte tenu de la réversibilité de l'écoulement :

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x}$$

Ces équations faisant intervenir 4 variables (ρ, v, p et h) pour 3 équations, il faut éliminer l'une d'entre elle et transformer le système pour qu'il puisse se mettre sous la forme d'un système quasi-linéaire d'équations aux dérivées partielles avec, par exemple, comme vecteur d'état :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}$$

Pour cela on va ré-écrire le bilan d'enthalpie massique sous la forme :

$$\rho\frac{dh}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x}$$

soit pour un gaz parfait :

$$\rho C_p\frac{dT}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x}$$

Par ailleurs, l'écoulement étant isentropique, on a :

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{constante}$$

soit :

$$\frac{dT}{T} - (\gamma-1)\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Donc :

$$\rho dT = (\gamma-1)\,T d\rho = (\gamma-1)\,\frac{p}{r}\frac{d\rho}{\rho}$$

Par ailleurs $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma-1}$ d'où :

$$\rho C_p dT = (\gamma-1)\,\frac{p}{r}\frac{\gamma r}{\gamma-1}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}d\rho$$

ou encore :

$$\frac{\gamma p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x}$$

Enfin, le bilan de masse peut s'écrire sous forme développée :

$$A\frac{\partial \rho}{\partial t} + Av\frac{\partial \rho}{\partial x} + A\rho\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

On en déduit que :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-1}{A}\left[A\rho\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial A}{\partial x}\right] = -\rho\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\gamma p}{\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\right) = -\gamma p\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}$$

Soit en définitive :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles s'écrit donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \end{array}\right.$$

En posant :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}$$

ce système peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A\frac{\partial W}{\partial x} = B$$

avec :

$$A(W) = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}$$

et :

$$B(W) = \begin{pmatrix} -\frac{\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \\ -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \end{pmatrix}$$

L'équation aux valeurs propres de $A(W)$ s'écrit :

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = (v-\lambda)\left[(v-\lambda)^2 - \frac{\gamma p}{\rho}\right] = 0$$

En posant $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ le carré de la célérité du son, on obtient :

$$(v-\lambda)\left((v-c)-\lambda\right)\left((v+c)-\lambda\right) = 0$$

La matrice $A(W)$ admet donc trois valeurs propres réelles et distinctes, donc le système est strictement hyperbolique. Il existe trois familles de courbes caractéristiques :

$$\left\{\begin{array}{ll} (C_0) & \frac{dx}{dt} = v \\ (C_+) & \frac{dx}{dt} = v + c \\ (C_-) & \frac{dx}{dt} = v - c \end{array}\right.$$

Les équations différentielles vérifiées le long de ces courbes caractéristiques peuvent alors être obtenues à partir du vecteur $B(W)$. Considérons la première valeur propre. La relation différentielle s'obtient en écrivant que le système suivant est vérifié :

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \\ -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{d\rho}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix}_{C_0}$$

On obtient en particulier les deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{C_0} \\ \gamma p\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \left.\frac{dp}{dt}\right|_{C_0} \end{array}\right.$$

qui ne sont vérifiées que si :

$$-\frac{\gamma p\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \gamma p\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{C_0} = -\frac{\gamma p\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \rho\left.\frac{dp}{dt}\right|_{C_0}$$

c'est-à-dire si :

$$\rho\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{C_0} - \gamma p\left.\frac{dp}{dt}\right|_{C_0} = 0$$

ou encore :

$$\frac{dp|_{C_0}}{p} - \gamma\frac{d\rho|_{C_0}}{\rho} = 0$$

soit :

$$d(p\rho^{-\gamma}) = 0 \qquad \text{le long des } (C_0)$$

Considérons maintenant les deux autres valeurs propres que l'on notera $\lambda_\varepsilon = v + \varepsilon c$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Le système qui doit être satisfait s'écrit maintenant :

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon c & \rho & 0 \\ 0 & -\varepsilon c & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & -\varepsilon c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \\ -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{d\rho}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix}_{C_\varepsilon}$$

On obtient en particulier les deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} -\varepsilon c\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\left.\frac{dv}{dt}\right|_{C_\varepsilon} \\ \gamma p\frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon c\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \left.\frac{dp}{dt}\right|_{C_\varepsilon} \end{array}\right.$$

ou encore, puisque $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ et en multipliant la première équation par $\varepsilon\rho c$:

$$\left\{\begin{array}{l} -\rho c^2\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon c\frac{\partial p}{\partial x} = -\varepsilon\rho c\left.\frac{dv}{dt}\right|_{C_\varepsilon} \\ \rho c^2\frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon c\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \left.\frac{dp}{dt}\right|_{C_\varepsilon} \end{array}\right.$$

qui ne sont vérifiées que si :

$$-\varepsilon\rho c\left.\frac{dv}{dt}\right|_{C_\varepsilon} - \frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \left.\frac{dp}{dt}\right|_{C_\varepsilon} = 0$$

c'est-à-dire si :

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{C_\varepsilon} + \varepsilon\rho c\left.\frac{dv}{dt}\right|_{C_\varepsilon} = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}$$

ou encore :

$$dp|_{C_\varepsilon} + \varepsilon\rho c\, dv|_{C_\varepsilon} = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}dt$$

soit :

$$dp + \varepsilon\rho c dv = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}dt \qquad \text{le long des } (C_\varepsilon)$$

On obtient donc en définitive :

$$\begin{cases} \text{le long des } (C_0) & d\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0 \\ \text{le long des } (C_+) & dp + \rho c dv = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}dt \\ \text{le long des } (C_-) & dp - \rho c dv = -\frac{\gamma p v}{A}\frac{\partial A}{\partial x}dt \end{cases}$$

La famille (C_0) correspond aux trajectoires des particules fluides. L'information qui se propage le long de ces courbes correspond à la conservation de l'entropie. Par conséquent, si les conditions initiales et les conditions aux limites correspondent à une entropie uniforme, alors l'écoulement restera bien isentropique.

4.2.3 Cas particulier d'une conduite de section constante

Dans ce cas $A =$ constante, $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$ donc $B = 0$ et on en déduit (en posant $\varepsilon = \pm 1$) $dp + \varepsilon \rho c dv = 0$ le long des (C_ε). Si on prend la différentielle du carré de la célérité du son, il vient :

$$2cdc = \gamma\frac{dp}{\rho} - \gamma p\frac{d\rho}{\rho^2} = \gamma\frac{dp}{\rho} - \frac{\gamma p}{\rho}\frac{d\rho}{\rho}$$

Par ailleurs, puisque l'écoulement est isentropique, on a :

$$p\rho^{-\gamma} = \text{constante}$$

soit :

$$\frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

qui donne :

$$dp = \frac{\gamma p}{\rho}d\rho$$

En combinant les deux relations précédentes on obtient donc :

$$2cdc = (\gamma - 1)\,\frac{dp}{\rho}$$

ou encore :

$$dp = \frac{2}{\gamma - 1}\rho c dc$$

On peut maintenant reporter cette expression dans l'équation différentielle vérifiée le long des (C_ε) :

$$\frac{2}{\gamma - 1}\rho c dc + \varepsilon \rho c dv = 0$$

En simplifiant par ρc il vient :

$$\frac{2}{\gamma - 1}dc + \varepsilon dv = 0$$

qui donne l'expression de l'invariant de Riemann R_ε :

$$R_\varepsilon = v + \frac{2\varepsilon}{\gamma - 1}c = \text{constante le long des } (C_\varepsilon) \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = v + \varepsilon c$$

Ces résultats sont à comparer à ceux obtenus pour les équations de Saint-Venant 1D.