Sujet 1

Exercice 1

1. (a) Justifier que $\arctan(u) \sim u$ au voisinage de 0.

   (b) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\,dt$ est une intégrale convergente.

   On note alors sa valeur $F(x)$.

2. On admet que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et que
$$\forall\, x \in D, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\Big)\,dt$$

   (a) Pour x appartenant à une partie de D à préciser, déterminer deux réels a et b (indépendants de t, mais pouvant dépendre de x) tels que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\arctan(x\,t)}{t\,(t^2+1)}\Big) = \frac{a}{t^2+1} + \frac{b}{x^2t^2+1}$$

   (b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in D$.

   (c) En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D$.

3. Soit g la fonction $t \mapsto g(t) = \Big(\dfrac{\arctan t}{t}\Big)^2$.

   Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ et calculer sa valeur.

Exercice 2

Une salle de spectacle contient N sieges avec $N \geqslant 1$. Un spectateur étourdi a perdu son billet et ne connait plus le numéro de sa place. Il arrive à se faufiler en premier dans la salle et prend un siege au hasard. Puis les autres spectateurs rentrent dans la salle un par un et s'installent à leur place (soit elle est directement libre, soit elle est occupée par l'étourdi à qui ils demandent de bouger, et l'étourdi reprend un siege au hasard dans les places vides restantes).

On suppose que tous les billets sont vendus.

On pose X_N la variable aléatoire égale au nombre de changements de place effectués par l'étourdi.

1. (a) Déterminer $X_N(\Omega)$.

   (b) Calculer $P(X_N = 0)$ et $P(X_N = N-1)$

2. Pour $N \geqslant 2$, en considérant ce que fait la première personne entrant dans la salle de spectacle apres l'étourdi, écrire une relation de récurrence entre $P(X_N = k)$ et $P(X_{N-1} = k), P(X_{N-1} = k-1)$, pour $k \in [\![\, 1 \,;\, N-1 \,]\!]$.

3. (a) Ecrire une relation de récurrence entre $E(X_N)$ et $E(X_{N-1})$.

   (b) En déduire l'expression de l'espérance de X_N.

Sujet 2

Exercice 1

Soit h et D_n les applications définies sur $[0,\pi]$ par $h(t) = \dfrac{1}{2\pi}t(t-2\pi)$ et $D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ à l'aide de D_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\pi[$. Montrer que :
$$D_n(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$
(on pourra commencer par remarquer que : $\cos(kt) = \mathfrak{Re}\left(e^{ikt}\right)$).
3. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ ($a < b$) et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
4. Montrer que l'application f définie sur $[0,\pi]$ par $f(t) = \dfrac{h(t)}{2\sin(t/2)}$ si $t \neq 0$ et par $f(0) = -1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
5. Déduire des questions précédentes que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B sont semblables.
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.